Colle ATS : Programme pour la semaine 19 (du 10/03 au 14/03)

II.9. Réduction d'endomorphismes

- Éléments propres : valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres (SEP), les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Polynôme caractéristique.
- Diagonalisation : un endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale ; une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
  Caractérisation d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ (ou d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) diagonalisable :
  - Il existe une base de vecteurs propres de f.
  - La somme des SEP de f est égale à E.
  - La somme des dimensions des SEP de f est égale à $\dim(E)$
  - Le polynôme caractéristique de f est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du SEP associé.
- Trigonalisation : Un endomorphisme f est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure ; une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PTP^{-1}$.
  Savoir qu'un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé. Toute matrice est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Expression du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable en fonction des valeurs propres. Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme (des indications doivent être données pour la trigonalisation).
- Applications de la diagonalisation : trouver les puissances n-ième d'une matrice diagonalisable ; Résolution de systèmes récurrents linéaires homogènes (les étudiants doivent aussi savoir traduire une récurrence scalaire en une récurrence vectorielle d'ordre 1 du type $X_{n+1} = AX_n$).