Colle ATS : Programme pour la semaine 18 (du 03/03 au 07/08)

I.14. Développements limités

- Comparaisons de fonctions : savoir les relations de négligeabilité et d'équivalence usuelles, transitivité et linéarité de la négligeabilité, transitivité de l'équivalence, compatibilité de l'équivalence avec le produit et le quotient, équivalence et composition, relation entre équivalence et négligeabilité, application au calcul de limites.
- Développements limités : définition, unicité de la partie régulière, troncature, connaître la forme du DL au voisinage de 0 d'une fonction paire ou d'une fonction impaire, calcul d'un DL au voisinage de a d'une fonction f à partir de celui de $h \longmapsto f(a+h)$ en 0.
- Savoir appliquer la formule de Taylor-Young.
- Opérations sur les DL : combinaisons linéaires, produit, composition, intégration terme à terme.
- Les étudiants doivent connaître des DL des fonctions suivantes au voisinage de 0 : $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, exp, sin, cos, sh, ch, $(1+x)^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$, tan à l'ordre 3, $x \longmapsto \ln(1-x)$, $x \longmapsto \ln(1+x)$.
- Développements asymptotiques.
- Applications :
  - Calcul de limites.
  - Détermination d'équivalents simples.
  - Étude locale d'une fonction : continuité, prolongement par continuité, dérivabilité, position relative d'une courbe et de sa tangente en un point.
  - Asymptotes : condition d'existence d'une asymptote à la courbe représentative d'une fonction, position relative d'une courbe et d'une asymptote.

II.8. Déterminants

- Déterminant d'une matrice carrée :
  - Le déterminant d'une matrice est définie comme l'unique application multilinéaire alternée telle que $\det(I_n) = 1$.
  - Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes ou deux lignes égales (ou proportionnelles) est nul.
  - Effet sur un déterminant des opérations élémentaires en colonnes ou en ligne (transvections, multiplication par un scalaire, échange).
  - Calcul du déterminant d'une matrice : déterminant d'une matrice triangulaire, se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, développement par rapport à une ligne ou une colonne.
  - Une matrice carrée est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.
  - $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det({}^tA) = \det(A)$, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
  - Déterminant d'une matrice triangulaire par bloc de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$

- Déterminant, dans une base donnée, d'une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n. Une famille de vecteurs est une base si, et seulement si, son déterminant dans une base quelconque est non nul.
- Déterminant d'un endomorphisme défini comme le déterminant de sa représentation matricielle dans une base quelconque, $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.