Colle ATS : Programme pour la semaine 17 (du 10/02 au 14/02)

II.7. Applications linéaires

Dans ce chapitre, les exercices peuvent porter les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels suivants ($\mathbb{K}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Savoir démontrer qu'une application est linéaire
  - en utilisant la définition ;
  - en trouvant une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $f(X) = AX$, si $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
- Trouver le noyau d'une application linéaire. Faire le lien entre $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$ et f est injective.
- Déterminer l'image d'une application linéaire :
  - en utilisant la définition.
  - en déterminant l'image d'une famille génératrice dans le cas de la dimension finie.

  Faire le lien entre f est surjective et $\mathrm{Im}\,(f) = F$.
- Isomorphismes : Utiliser la définition pour démontrer qu'une application linéaire est un isomorphisme ou pas. En dimension finie :
  - $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme si, et seulement si, f transforme une (toute) base de E en une base de F.
  - Deux espaces vectoriels sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension.
  - Si $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$:

    $$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

    Cas des endomorphismes.
- Matrice d'une application linéaire :
  - Savoir déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ étant une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F. Matrice de la composée d'applications linéaires (produit de matrices), matrice de la réciproque d'un isomorphisme (inverse d'une matrice).
  - Changement de bases : matrice de passage, effet du changement de base sur la matrice d'un vecteur ou la matrice d'une application linéaire. Notation $\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B},\mathscr{B}'\right)$. Cas des endomorphismes. Matrices semblables
- Rang d'une application linéaire : théorème du rang, lien entre le rang d'une application linéaire et le rang d'une de ses représentations matricielles.
- Trace d'une matrice carrée : $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$. Trace d'un endomorphisme.
- Projecteurs et symétries : savoir les définitions et les propriétés portant sur l'image et le noyau, caractérisation par $p \circ p = p$ et $s \circ s = \mathrm{Id}$, formule $s = 2p - \mathrm{Id}$. Matrice diagonale dans une base adaptée.