# Colle ATS : Programme pour la semaine 15 (du 27/01 au 31/01)

## II.6. Espaces vectoriels

- Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^I$, $\mathscr{C}^n(I;\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- Sous-espace vectoriel : définition, savoir montrer qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel est ou n'est pas un sous-espace vectoriel, savoir montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel en montrant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu en tant que tel.
- Famille finie de vecteurs : combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré (notation $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$), famille libre, famille génératrice. Savoir montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre ou génératrice en déterminant le rang de la matrice associée. Savoir déterminer une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par un système linéaire homogène.
- Base : caractérisation par famille libre et génératrice, coordonnées d'un vecteur dans une base (notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$). Bases canoniques des e.v. de référence. Savoir démontrer qu'une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ de degrés échelonnés forme une base.
- Espaces vectoriels de dimension finie : définition, théorème de la base extraite (savoir extraire une base d'une famille génératrice finie), existence d'une base, théorème de la base incomplète (savoir compléter une famille libre en une base). Pour un e.v. de dimension $n$ : toute famille libre comporte au plus $n$ vecteurs, toute famille génératrice comporte au moins $n$ vecteurs, toute famille libre de $n$ vecteurs est une base, toute famille génératrice de $n$ vecteur est une base. Dimension d'un s.e.v. : la dimension d'un s.e.v. de $E$ est inférieur à la dimension de $E$, cas d'égalité.
- Somme et intersection de sous-espaces vectoriels, somme directe, formule de Grassmann pour la dimension finie, sous-espaces supplémentaires.