Programme de colles, semaine du 22-11

I) Questions de cours

- Donner le DSE (+ rayon) de $\ln(1 \pm x)$, $(1+x)^{\alpha}$, cos, sin, cosh, sinh, arctan,
- Énoncer le théorème de produit de Cauchy pour des séries entières
- Donner l'expression de la dérivée p-ième de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Sur quel intervalle est-elle valable ?
- Une des quatre questions de l'exercice suivant.

  Exercice 1 On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.
  1. Montrer que S converge uniformément sur $[0, 1]$.
  2. Montrer que S converge simplement sur $]-1, 1[$.
  3. Montrer que S converge normalement sur tout segment de la forme $[-a, a]$, pour $a \in]0, 1[$.
  4. En admettant que S est continue sur $[0, 1]$, montrer que $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

II) Intégration

Cf programme précédent.

III) Séries entières

Séries entières complexes $\sum a_n z^n$ et réelles $\sum a_n x^n$.

1) Convergence d'une série entière

- Rayon de convergence
  - ▷ $R = \sup\{|z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$
  - ▷ Si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument
  - ▷ Si $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement
  - ▷ ★ Si $(a_n z^n)$ est bornée, $R \geq |z|$
  - ▷ ★ Si $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0, $R \leq |z|$
- Détermination du rayon
  - ▷ Règle de d'Alembert : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell$, $R = \frac{1}{\ell}$
  - ▷ ★ Cas de séries lacunaires
  - ▷ Résultats de comparaisons
- Opérations
  - ▷ Sommes de séries entières
    Le rayon est $\geq \min(R_a, R_b)$.
  - ▷ Produit de Cauchy de deux séries entières
    Le rayon est $\geq \min(R_a, R_b)$.

2) Régularité

$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$, et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.

- La convergence de la série de fonctions $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est normale sur tout segment $[-a, a] \subset]-R, R[$.
- f est continue sur $]-R, R[$.
- Série entière dérivée
  - ▷ Le rayon de $\sum_{n\geq 1} a_n n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1}(n+1)x^n$ est R (le même que $\sum a_n x^n$)
  - ▷ f est dérivable sur $]-R, R[$, de dérivée

$$\forall x \in]-R, R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}.$$

- Série entière primitivée
  - ▷ Le rayon de $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est R

- ▷ La fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la primitive de f sur $]-R, R[$ qui s'annule en 0.
- f est de classe $\mathcal{C}^i$ sur $]-R, R[$.
  - ▷ $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

3) Développements en série entière

- f est DSE en 0 si elle coïncide au voisinage de 0 avec la somme d'une série entière
- DSE des fonctions usuels (+ rayons)
- Série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}}{n!} x^n$ d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$
  - ▷ Si f est DSE, alors elle est égale à la somme de sa série de Taylor au voisinage de 0.
- Unicité du DSE
  - ▷ si f est paire, et DSE, son DSE ne contient que des termes de degré pair.