Programme de colles, semaine du 08-11

I) Questions de cours

- Montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des valeurs propres distinctes de u, les espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe.
- Montrer que deux matrices semblables ont le même spectre
- Montrer que si A est une matrice et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda({}^tA)$.
- Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente
- Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ est convergente
- Montrer que $\int_0^1 \ln t \, dt$ est convergente

II) Réduction

1) Éléments propres

Révisions sur les matrices d'endomorphismes.
Valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme/d'une matrice. Spectre.
Espace propre, $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id)$, $\dim E_\lambda \geq 1$.
Les espaces propres de u sont stables par u.
(Toute sous-famille finie des) Les espaces propres de u sont en somme directe.
Si $u(x) = \lambda x$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$. Si u est un isomorphisme, $u^{-1}(x) = \lambda^{-1} x$.

2) Cas des matrices

a) Généralités

Caractérisation : $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ ssi $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$ ssi $A - \lambda I_n$ non inversible ssi $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
Calcul du «polynôme caractéristique» $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ sur des exemples, détermination des valeurs et espaces propres.

b) Multiplicité de valeurs propres

Toute matrice complexe admet au moins une valeur propre. Toute matrice complexe admet exactement n valeurs propres, comptées avec multiplicité (car le polynôme caractéristique a exactement n racines).
La multiplicité m_λ d'une valeur propre est sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique.
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres comptées avec multiplicité.
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda$.

c) Stabilité du spectre par similitude

Deux matrices semblables ont le même spectre, compté avec multiplicité, et la même dimension des espaces propres. Idem pour ${}^tA$.
Le spectre d'un endomorphisme est le spectre de sa matrice dans n'importe quelle base.

d) Cas des matrices triangulaires

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire/diagonale sont exactement ses coefficients diagonaux.

3) Diagonalisation

A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, u est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.
u est diagonalisable si et seulement si

- il existe une base de E formée de vecteurs propres de u
- $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$
- $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u))$
- le polynôme caractéristique est scindé (toujours le cas sur $\mathbb{C}$) et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

En dimension n, si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

4) Trigonalisation

- D'une matrice, d'un endomorphisme
- A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
  - ▷ En particulier, toute matrice complexe est trigonalisable.

Toute matrice complexe admet exactement n valeurs propres complexes, comptées avec multiplicité, et est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont ces valeurs propres.
En particulier $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda$ et $\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda$.

III) Intégration

1) Rappels de sup

- Primitives
- IPP
- Changement de variable

2) Intégrales généralisées

- Intégrales impropre en un point
- Intégrales convergentes, calcul d'une intégrale convergente.
- Si $\int_0^2 f(t)dt$ est impropre en 0 et en 2, $\int_0^2 f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_1^2 f(t)dt$ convergent.

3) Fonction intégrables

- On dit que f est intégrable sur I si $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente.
- Théorèmes de comparaison sur les fonctions intégrables.
- Intégrales de références en $+\infty$ et en 0 : $\frac{1}{t^\alpha}, \ln t$