Programme de colles, semaine du 10-18

I) Questions de cours

- Énoncer au moins un des 5 théorèmes d'application de la convergence uniforme (continuité, classe C^1, classe C^k, interversion limite intégrale, double limite) pour les suites de fonctions ou leur équivalent pour les séries de fonctions.
- Montrer l'implication «Convergence normale $\Rightarrow$ Convergence uniforme» pour les séries de fonctions.
- Montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des valeurs propres distinctes de u, les espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe.
- Montrer que deux matrices semblables ont le même spectre
- Montrer que si A est une matrice et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda({}^tA)$.

II) Convergence uniforme des suites de fonctions

Convergence uniforme des suites de fonctions. Convergence uniforme sur tout segment.
Applications de la convergence uniforme : conservation par passage à la limite de la continuité, de la classe, interversion limite/intégrale, théorème de la double limite.
Applications de la convergence normale et uniforme des séries de fonctions : conservation par passage à la limite de la continuité, de la classe (théorèmes de dérivation terme à terme), intégration terme à terme, interversion somme/limite.

III) Réduction

1) Éléments propres

Révisions sur les matrices d'endomorphismes.
Valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme/d'une matrice. Spectre.
Espace propre, $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id)$, $\dim E_\lambda \geq 1$.
Les espaces propres de u sont stables par u.
(Toute sous-famille finie des) Les espaces propres de u sont en somme directe.
Si $u(x) = \lambda x$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$. Si u est un isomorphisme, $u^{-1}(x) = \lambda^{-1}x$.

2) Cas des matrices

a) Généralités

Caractérisation : $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ ssi $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$ ssi $A - \lambda I_n$ non inversible ssi $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
Calcul du «polynôme caractéristique» $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ sur des exemples, détermination des valeurs et espaces propres.

b) Multiplicité de valeurs propres

Toute matrice complexe admet au moins une valeur propre.
La multiplicité m_λ d'une valeur propre est sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique.
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres comptées avec multiplicité.
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda$.

c) Stabilité du spectre par similitude

Deux matrices semblables ont le même spectre, compté avec multiplicité, et la même dimension des espaces propres. Idem pour ${}^tA$.
Le spectre d'un endomorphisme est le spectre de sa matrice dans n'importe quelle base.

d) Cas des matrices triangulaires

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire/diagonale sont exactement ses coefficients diagonaux.
Toute matrice A admet exactement n valeurs propres complexes, comptées avec multiplicité, et $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda$ et $\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda$.

3) Diagonalisation

A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, u est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.
u est diagonalisable si et seulement si

- il existe une base de E formée de vecteurs propres de u

- $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$
- $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u))$
- le polynôme caractéristique est scindé (toujours le cas sur $\mathbb{C}$) et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

En dimension n, si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.