Programme de colles, semaine du 22-03

I) Questions de cours

- Donner l'ensemble des solutions réelles d'une équation différentielle ou d'une équation de récurrence linéaire d'ordre 2
- Théorème de Cauchy-Lipschitz sur la structure de l'ensemble des solutions d'une équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$
- Théorème de Cauchy-Lipschitz version problème de Cauchy pour l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$

II) Équations et systèmes différentiels

1) Équations différentielles scalaires d'ordre 1

- Rappels sur les équations résolues
  - ▷ Structure de l'ensemble des solutions
  - ▷ Unique solution à un problème de Cauchy
  - ▷ Méthode de variation de la constante
  - ▷ Recherche d'une solution particulière sous la forme $Ke^{@}$ ou $Kte^{@}$
- Raccordement de solutions

2) Systèmes différentiels

- Résolution de systèmes différentiels diagonaux, triangulaires
- Équations vectorielles $X' = A(t)X + B$
- Structure de l'ensemble des solutions
  - ▷ somme d'une solution particulière et des solutions homogènes
  - ▷ Pour l'équation homogène, c'est un sous-espace vectoriel
- Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : existence et unicité de la solution au problème de Cauchy
- L'ensemble des solutions de l'équation homogène est de dimension n.
- Résolution de système par diagonalisation/trigonalisation
  - ▷ Si $A = PDP^{-1}$, $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$, où $Y = P^{-1}X$

3) Équations différentielles scalaires d'ordre supérieur (2)

- $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \Leftrightarrow Y' = AY + B$, où $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$
  - ▷ Extension à une équation d'ordre n
- Extension des résultats sur les systèmes différentiels
  - ▷ Problème de Cauchy
  - ▷ Théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy
  - ▷ Pour une équation homogène résolue, l'ensemble des solutions est de dimension 2
  - ▷ Structure de l'ensemble des solutions dans le cas général
- Résolution d'équations scalaires d'ordre 2 à coefficients constants
- Détermination de solutions particulières
  - ▷ polynomiales
  - ▷ développables en série entière

4) Suites récurrentes d'ordre 2

- Solutions d'une relation de récurrence d'ordre 2 à coefficients constants
- $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0 \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$, où $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$
  - ▷ $X_n = A^n X_0$, on est ramené au calcul de A^n, par réduction de la matrice A.

III) Révisions

- Séries
- Séries de fonctions
- Séries entières