Programme de colles, semaine du 14-02

I) Questions de cours

- Montrer que si $f : \mathbb{R} \to E$ est dérivable et $u : E \to E$ est linéaire (en dimension finie), alors $u \circ f$ est dérivable et $(u \circ f)' = u \circ f'$.
- Énoncer la formule de Leibniz pour des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Énoncer la formule des accroissements finis
- Énoncer le théorème de Taylor Young
- Donner la définition du gradient, et de la différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$
- Énoncer le théorème de développement limité, pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

II) Dérivation : Fonctions vectorielles et rappels

1) Fonctions vectorielles

- Dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \to E$
- Opérations sur les fonctions dérivables :
  - ▷ combinaisons linéaires
  - ▷ $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$, où $f : \mathbb{R} \to E$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - ▷ $(u \circ f)' = u \circ f'$, où $f : \mathbb{R} \to E$ et $u : E \to E$ linéaire

2) Rappels de sup

- Étude de dérivabilité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Théorème de la limite de la dérivée
- Théorème de la bijection dérivable/$\mathcal{C}^k$
- Rolle
- FAF, IAF
- Formule de Taylor Young

3) Notion d'arc paramétré

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

- Notion de trajectoire
- Tangente en un point régulier
  - ▷ $D_{t_0} = \{f(t_0) + uf'(t_0),\, u \in \mathbb{R}\}$
  - ▷ $f'(t_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_{t_0}
  - ▷ $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur normal
  - ▷ L'équation de la tangente est de la forme $-bx + ay = c$
- Longueur de l'arc paramétré : $L = \int_a^b \|f'(t)\|_2 \, dt$

III) Calcul différentiel : fonctions $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

1) Continuité

a) Rappels pour des fonctions $E \to F$

- Opérations

b) Fonctions $E \to \mathbb{R}$

- Opérations
- Fonctions coordonnées, fonctions polynomiales
- Continuité de la norme $E \to \mathbb{R}$
- Étude de la continuité de fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  - ▷ continuité en $(0, 0)$, ou prolongement par continuité

2) Dérivées partielles, fonctions $\mathcal{C}^1$

a) Dérivées partielles

- Fonctions partielles, dérivées partielles
- fonctions $\mathcal{C}^1$: existence des dérivées partielles + continuité de celles-ci

b) DL d'une fonction $\mathcal{C}^1$

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_i h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o_{h\to 0}(\|h\|)$$

- gradient, différentielle d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$
  - ▷ $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o_{h\to 0}(\|h\|)$
  - ▷ $f(a+h) = f(a) + \langle h, \operatorname{grad} f(a)\rangle + o_{h\to 0}(\|h\|)$
- f $\mathcal{C}^1$ est constante sur U ouvert convexe si et seulement si ses dérivées partielles sont nulles si et seulement si $\operatorname{grad} f = 0$

c) Lignes de niveau

- Ligne de niveau pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- Champ de gradient
- Les lignes de niveau sont orthogonales au champ de gradient :
  - ▷ si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est un arc paramétré dont la trajectoire est incluse dans une ligne de niveau, $\forall t,\ g'(t) \perp \operatorname{grad} f(g(t))$

3) Extrema

- Si f est continue sur une partie D fermée bornée, alors f y est bornée, et atteint ses bornes.
- Point critique, extrema, extrema locaux
- Sur un ouvert, si f admet un extremum local en a, et f admet des dérivées partielles en a, alors a est un point critique
- Si f $\mathcal{C}^1$ sur un fermé borné, ses extremum sont atteints soit en un point critique, soit sur la frontière (le bord).

4) Dérivées partielles d'ordre deux

- fonction $\mathcal{C}^2$
- Théorème de Schwarz : si f $\mathcal{C}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

5) Notion d'équations aux dérivées partielles

- Solutions de classe $\mathcal{C}^1/\mathcal{C}^2$ des EDPs
  - ▷ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$
  - ▷ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(y)$
  - ▷ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$
  - ▷ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$