Programme de colles, semaine du 31-01

I) Questions de cours

- Si P est un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors toute valeur propre de A est racine de P.
- Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et $F \subset \mathbb{R}^n$ est stable par A, alors $F^\perp$ est stable par A
- Énoncer le théorème spectral pour une matrice symétrique.
- Montrer qu'une projection orthogonale est un endomorphisme symétrique
- Montrer que si $f : \mathbb{R} \to E$ est dérivable et $u : E \to E$ est linéaire (en dimension finie), alors $u \circ f$ est dérivable et $(u \circ f)' = u \circ f'$.

II) Réduction II : Polynômes d'endomorphismes et endomorphismes symétriques

1) Rappels

- Polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_n - A)$
- Lien déterminant/trace et valeurs propres complexes d'une matrice (au nombre de n)
- Caractèrisations de diagonalisabilité
- λ valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ non inversible
- Expression du déterminant/de la trace d'une matrice en fonction de ses n valeurs propres complexes

2) Polynômes annulateurs

- Polynômes d'endomorphismes
- Lien polynôme annulateur et valeurs propres
- Lien polynôme annulateur et inversibilité
- Théorème de Cayley-Hamilton
- A/u est diagonalisable si et seulement si
  - ▹ A/u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
  - ▹ A/u est annulé par $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A}(X - \lambda)$

3) Matrices symétriques

- Si A est symétrique et $X \in \mathbb{R}^n$, $\langle AX, X\rangle = \langle X, AX\rangle$
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, A est diagonalisable dans une BON
  - ▹ Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$
  - ▹ Il existe une BON de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de A

4) Endomorphismes symétriques

- Définition
- u symétrique si et seulement si sa matrice dans une BON est symétrique
- Théorème spectral : tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une BON

III) Dérivation : Fonctions vectorielles et rappels

1) Fonctions vectorielles

- Dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \to E$
- Opérations sur les fonctions dérivables :
  - ▹ combinaisons linéaires
  - ▹ $f \circ g$, où $f : \mathbb{R} \to E$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - ▹ $u \circ f$, où $f : \mathbb{R} \to E$ et $u : E \to E$ linéaire

2) Rappels de sup

- Étude de dérivabilité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Théorème de la limite de la dérivée