Programme de colles, semaine du 24-01

I) Questions de cours

- Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\det M = \pm 1$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{\pm 1\}$
- Si $u : E \to E$ est une isométrie, et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON, alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON
- Décrire les isométries de $\mathbb{R}^2$ (expressions matricielles)
- Si P est un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors toute valeur propre de A est racine de P.
- Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et $F \subset \mathbb{R}^n$ est stable par A, $F^\perp$ est stable par A

II) Isométries d'un espace euclidien

1) Isométries vectorielle

a) Définition, exemples

- Notation $\mathcal{O}(E)$
- $u \in \mathcal{O}(E)$ si u préserve la norme
- symétrie orthogonale
- matrice d'une rotation dans $\mathbb{R}^2$

b) Lien avec le produit scalaire

- $u \in \mathcal{O}(E)$ préserve le produit scalaire
- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON

2) Matrices orthogonales

- Notation $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
- $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tMM = I_n$
- $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les vecteurs colonnes de M forment une BON de $\mathbb{R}^n$
- L'application $X \mapsto MX$ est une isométrie
- Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\det M = \pm 1$
  - ▹ $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$
- Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, les seules valeurs propres possibles de M sont ± 1
- Lien avec les isométries : $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si la matrice de u dans une BON est une matrice orthogonale.

3) Produit mixte dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

- Notation $[u, v]$ ou $[u, v, w]$
- le produit mixte est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs
- $[u, v] = \|u\|\,\|v\| \sin\theta$, où θ est l'angle orienté entre u espace vectoriel v.

4) Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

- Notation $u \wedge v$
- $u \wedge v \perp \mathrm{Vect}(u, v)$
- $\|u \wedge v\| = |[u, v]|$
- $[u, v, u \wedge v] \geq 0$

5) Classification des isométries dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

- Isométrie directe/indirecte, notation $SO_n(\mathbb{R})$
- Dans $\mathbb{R}^2$,
  - ▷ les isométries directes sont les rotations
  - ▷ les isométries indirectes sont les symétries par rapport à une droite.
  - ▷ Expressions matricielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$
- Dans $\mathbb{R}^3$, toute isométrie u autre que I_3 et $-I_3$ est
  - ▷ une rotation autour d'une droite D, ($\det u = 1$ et $D = E_1$)
  - ▷ La composée d'une rotation autour d'une droite D, et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $D^\perp$ ($\det u = -1$ et $D = E_{-1}$)
  - ▷ Expressions matricielles dans une BON adaptée à $D \oplus D^\perp$
- Détermination des éléments caractéristiques d'une isométrie.

III) Réduction II : Polynômes d'endomorphismes et endomorphismes symétriques

1) Rappels

- Polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_n - A)$
- Lien déterminant/trace et valeurs propres complexes d'une matrice (au nombre de n)
- Caractèrisations de diagonalisabilité

2) Polynômes annulateurs

- Polynômes d'endomorphismes
- Lien polynôme annulateur et valeurs propres
- Lien polynôme annulateur et inversibilité
- Théorème de Cayley-Hamilton
- A/u est diagonalisable si et seulement si
  - ▷ A/u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
  - ▷ A/u est annulé par $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A}(X - \lambda)$

3) Matrices symétriques

- Si A est symétrique et $X \in \mathbb{R}^n$, $\langle AX, X\rangle = \langle X, AX\rangle$
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, A est diagonalisable dans une BON
  - ▷ Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$