Programme de colles, semaine du 17-01

Rmq : lundi les élèves auront eu peu de pratique sur le chapitre isométrie/matrices orthogonales.

I) Questions de cours

- Montrer que si $F_1 \perp F_2 \perp \ldots \perp F_n$, alors $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$
- Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel et que $F^\perp \oplus F$
- Montrer que Si $X = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, on a

$$x \in X^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \forall i,\ \langle x, x_i \rangle = 0$$

- Montrer que $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$
- Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\det M = \pm 1$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{\pm 1\}$
- Si $u : E \to E$ est une isométrie, et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON, alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON

II) Espaces préhilbertiens

1) Produit scalaire et norme

- produits scalaires
  - ▷ bilinéarité
  - ▷ canoniques sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
  - ▷ usuels sur $\mathcal{C}^0(I)$
- Norme euclidienne
- inégalité de Cauchy-Schwarz

2) Orthogonalité

- de vecteurs
- famille orthogonale, orthonormale
- Théorème de Pythagore
- orthogonalité d'espaces
- espace orthogonal $F^\perp$
  - ▷ Si F est de dimension finie, $F^\perp$ est un supplémentaire
- BON
  - ▷ coordonnées d'un vecteur dans une BON
  - ▷ Matrice d'une application linéaire dans une BON

3) Projection orthogonale (projection sur F, parallèlement à $F^\perp$)

- $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$
- Expression dans une BON
- Orthonormalisation de Gram-Schmidt
- Inégalité de Bessel : $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$, cas d'égalité
- distance $d(x, F)$ d'un vecteur à un sous-espace vectoriel
- Si F est de dimension finie, la distance est atteinte pour le projeté orthogonal

III) Hyperplans

- En dimension finie, le noyau d'une forme linéaire non nulle est de dimension $n - 1$.
- Vecteur normal à un hyperplan H : c'est un élément non nul de $H^\perp$
- Théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien
- Calcul de la distance d'un point à un plan, ou à une droite dans $\mathbb{R}^3$

IV) Isométries d'un espace euclidien

1) Isométries vectorielle

a) Définition, exemples

- Notation $\mathcal{O}(E)$
- $u \in \mathcal{O}(E)$ si u préserve la norme
- symétrie orthogonale
- matrice d'une rotation dans $\mathbb{R}^2$

b) Lien avec le produit scalaire

- $u \in \mathcal{O}(E)$ préserve le produit scalaire
- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON

2) Matrices orthogonales

- Notation $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
- $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tMM = I_n$
- $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les vecteurs colonnes de M forment une BON de $\mathbb{R}^n$
- L'application $X \mapsto MX$ est une isométrie
- Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\det M = \pm 1$
  - ▹ $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$
- Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, les seules valeurs propres possibles de M sont ± 1
- Lien avec les isométries : $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si la matrice de u dans une BON est une matrice orthogonale.