Programme de colles, semaine du 10-01

I) Questions de cours

- Montrer que l'une des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$
- Montrer que $B(a,r)$ est convexe
- Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Montrer que si $F_1 \perp F_2 \perp \ldots \perp F_n$, alors $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$
- Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel et que $F^\perp \oplus F$
- Montrer que Si $X = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, on a

$$x \in X^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \forall i,\ \langle x, x_i \rangle = 0$$

- Montrer que $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$

II) Espaces vectoriels normés et topologie

1) Norme sur un espace vectoriel

- définition
- Normes usuelles
  - ▷ $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$
  - ▷ $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$
  - ▷ Normes euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$
  - ▷ Normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Sur une espace de fonctions, $\|\cdot\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme

2) Distance et topologie

- $d(x,y) = \|x-y\|$
- Boule ouverte $B(a,r)$ et boule fermée $\overline{B(a,r)}$ dans un evn
- Partie bornée
- Partie convexe
  - ▷ Les boules et les sous-espaces vectoriels sont convexes
- Partie ouverte, partie fermées
  - ▷ Exemples simples

3) Suites dans un evn

- $x_n \to x$ si $\|x_n - x\| \to 0$
- En dimension finie, la convergence ne dépend pas de la norme
- Caractérisation séquentielle des fermés :
  $F \subset E$ est fermé ssi pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$, si $x_n \to x$, alors $x \in F$
- En dimension finie, le caractère fermé/ouvert ne dépend pas de la norme.
- Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé

4) Continuité

- $f : E \to F$ est continue si pour tout $a \in E$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.
  - ▷ En particulier, si $x_n \to \ell$, $f(x_n) \to f(\ell)$
- Fonctions lipschitziennes
  - ▷ lipschitzienne $\Rightarrow$ continue
- Applications linéaires
  - ▷ En dimension finie, toute application linéaire est lipschitzienne
  - ▷ donc continue
  - ▷ Applications : si $A_n \to A$, $A_n B \to AB$, si $P_n \to P$, $P_n(1) \to P(1)$
- Continuité d'une application bilinéaire, de $A \mapsto A^p$, du déterminant
- Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue
  - ▷ $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est fermé
  - ▷ $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ est fermé
  - ▷ $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est ouvert

III) Espaces préhilbertiens

1) Produit scalaire et norme

- produits scalaires
  - ▷ bilinéarité
  - ▷ canoniques sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
  - ▷ usuels sur $\mathcal{C}^0(I)$
- Norme euclidienne
- inégalité de Cauchy-Schwarz

2) Orthogonalité

- de vecteurs
- famille orthogonale, orthonormale
- Théorème de Pythagore
- orthogonalité d'espaces
- espace orthogonal $F^\perp$
  - ▷ Si F est de dimension finie, $F^\perp$ est un supplémentaire
- BON
  - ▷ coordonnées d'un vecteur dans une BON
  - ▷ Matrice d'une application linéaire dans une BON

3) Projection orthogonale (projection sur F, parallèlement à $F^\perp$)

- $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$
- Expression dans une BON
- Orthonormalisation de Gram-Schmidt
- Inégalité de Bessel : $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$, cas d'égalité
- distance $d(x, F)$ d'un vecteur à un sous-espace vectoriel
- Si F est de dimension finie, la distance est atteinte pour le projeté orthogonal