Programme de colles, semaine du 03-01

I) Questions de cours

- Énoncer un des cinq théorèmes de convergence dominée (cf ci-dessous)
- Montrer que l'une des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$
- Montrer que $B(a,r)$ est convexe
- Donner la définition d'une partie ouverte
- Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II) Suites, séries de fonctions et Intégrales à paramètres : convergence dominée

1) Suite de fonctions

Théorème. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle J.*
On suppose

- *(f_n) CVS vers f sur J*
- *f_n et f sont $\mathcal{C}^0$ p.m. sur J.*
- *il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ p.m. et intégrable telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in J,\ |f_n(t)| \le \varphi(t).$$

Alors (les fonctions f_n et f sont intégrables et)

$$\int_J f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_J f(t)dt$$

2) Intégrales à paramètres

a) Continuité

Théorème. *On considère $g : I \times J \to \mathbb{K}$ et on considère*

$$f(x) = \int_J g(x,t)dt.$$

On suppose

- *$\forall x \in I, t \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ p.m.*
- *$\forall t \in J, x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$*
- *$\forall x \in I,\ \forall t \in J,\ |g(x,t)| \le \varphi(t)$, où φ est $\mathcal{C}^0$ p.m. et intégrable*

Alors f est (bien définie sur J et) continue sur J.

b) Limite

Théorème. *On considère $g : I \times J \to \mathbb{K}$, $f(x) = \int_J g(x,t)dt$, et a une extrémité de I.*
On suppose

- *$\forall x \in I, t \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ p.m.*
- *$\forall t \in J,\ g(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} h(t)$, où h est une fonction $\mathcal{C}^0$ p.m.*
- *$\forall x \in I,\ \forall t \in J,\ |g(x,t)| \le \varphi(t)$, où φ est $\mathcal{C}^0$ p.m. et intégrable*

Alors (h est intégrable et)

$$\int_J g(x,t)dt \xrightarrow[x\to a]{} \int_J h(t)dt.$$

c) Dérivabilité

Théorème. *On considère $g : I \times J \to \mathbb{K}$, $f(x) = \int_J g(x,t)dt$, et a une extrémité de I.*
On suppose

- $\forall x \in I, t \mapsto g(x,t)$ *est* $\mathcal{C}^0$ *p.m et intégrable*
- $\forall t \in J, x \mapsto g(x,t)$ *est* $\mathcal{C}^1$*, de dérivée* $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$
  et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ *est* $\mathcal{C}^0$ *p.m.*
- $\forall x \in I, \forall t \in J, \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$*, où* φ *est* $\mathcal{C}^0$ *p.m. et intégrable.*

Alors f est (bien définie et) $\mathcal{C}^1$ sur J, de dérivée

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt.$$

3) Séries de fonctions

Théorème. *On considère $\sum f_n$ une série de fonctions sur J.*
On suppose

- $\sum f_n$ *CVS vers une fonction* f $\mathcal{C}^0$ *p.m.*
- f_n *sont* $\mathcal{C}^0$ *p.m. et intégrables.*
- $\sum \int_J |f_n|$ *converge.*

Alors $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur J et

$$\int_J \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_J f_n(t)dt.$$

III) Espaces vectoriels normés et topologie

1) Norme sur un espace vectoriel

- définition
- Normes usuelles
  - ▹ $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$
  - ▹ $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$
  - ▹ Normes euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$
  - ▹ Normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Sur une espace de fonctions, $\|\cdot\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme

2) Distance et topologie

- $d(x,y) = \|x-y\|$
- Boule ouverte $B(a,r)$ et boule fermée $\overline{B(a,r)}$ dans un evn
- Partie bornée
- Partie convexe
  - ▹ Les boules et les sous-espaces vectoriels sont convexes
- Partie ouverte, partie fermées
  - ▹ Exemples simples

3) Suites dans un evn

- $x_n \to x$ si $\|x_n - x\|$ 0
- En dimension finie, la convergence ne dépend pas de la norme
- Caractérisation séquentielle des fermés :
  $F \subset E$ est fermé ssi pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$, si $x_n \to x$, alors $x \in F$
- En dimension finie, le caractère fermé/ouvert ne dépend pas de la norme.
- Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé

4) Continuité

- $f : E \to F$ est continue si pour tout $a \in E$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.
  - ▹ En particulier, si $x_n \to \ell$, $f(x_n) \to f(\ell)$
- Fonctions lipschitziennes
  - ▹ lipschitzienne $\Rightarrow$ continue
- Applications linéaires
  - ▹ En dimension finie, toute application linéaire est lipschitzienne
  - ▹ donc continue
  - ▹ Applications : si $A_n \to A$, $A_n B \to AB$, si $P_n \to P$, $P_n(1) \to P(1)$
- Continuité d'une application bilinéaire, de $A \mapsto A^p$, du déterminant
- Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue
  - ▹ $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est fermé
  - ▹ $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ est fermé
  - ▹ $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est ouvert